

解 答

2026	科目名	数学（線形代数）	1/1
------	-----	----------	-----

[解答]

(1) 固有値は 0 と 6(重複度 2)

$$(2) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ とすると, } P \text{ は直交行列で } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

(3) $A^n = P ({}^tPAP)^n P = 6^{n-1}A (A^2 = 6A \text{ から解る})$ 。

(4) $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} A {}^t\mathbf{x}$ と書けるので, $\mathbf{y} = \mathbf{x}P = (y_1, y_2, y_3)$ と置くと,

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}P ({}^tPAP) {}^tP {}^t\mathbf{x} = \mathbf{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} {}^t\mathbf{y} = 6y_2^2 + 6y_3^2 \geq 0$$

である。また, $q(\mathbf{x}) = 0$ である必要十分条件は $y_2 = y_3 = 0$ である。つまり, P の 2 列目と 3 列目に直交している \mathbf{x} となり, それは P の第 1 列目で生成される部分空間である $\{k(1, 1, 1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ となる。

別解 1 A は半正定値なので, $A = Q {}^tQ$ という形で書ける。よって, $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A {}^t\mathbf{x} = \mathbf{x}Q {}^tQ {}^t\mathbf{x} = \mathbf{w} {}^t\mathbf{w} = 0$ であれば, ${}^t\mathbf{w} = \mathbf{0}$, つまり ${}^tQ {}^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となり, 両辺に Q を掛けて $A {}^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を得る。逆に $A {}^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であるとする, 明らかに $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A {}^t\mathbf{x} = 0$ となる。以上より, $q(\mathbf{x}) = 0$ である必要十分条件は $A {}^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることであり, $q(\mathbf{x}) = 0$ なる \mathbf{x} は A の固有値 0 固有空間 $\langle(1, 1, 1)\rangle$ と一致する。

別解 2 $q(\mathbf{x}) = 2(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2$ と書けるので, $q(\mathbf{x}) \geq 0$ であり, 等号成立は $x_1 = x_2 = x_3$ で成立する。

(5)

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}P ({}^tPAP) {}^tP {}^t\mathbf{x} = \mathbf{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} {}^t\mathbf{y} = 6y_2^2 + 6y_3^2 \geq 0$$

であり, P が直交行列であるので, \mathbf{x} がノルム 1 のベクトル全体を動くとき, $\mathbf{y} = \mathbf{x}P$ もノルム 1 のベクトル全体を動く。よって, $q(\mathbf{x}) = 6y_2^2 + 6y_3^2 \leq 6$ であり, 等号は $y_2^2 + y_3^2 = 1$ すなわち, $y_1 = 0$ のとき成立する。よって, 最大値は 6 である。