

問題用紙

2026	科目名	数学（線形代数）	1/2	通し番号	
------	-----	----------	-----	------	--

問題

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、次に答えよ。

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) A を直交行列によって対角化せよ。ただし、その対角化に使用した直交行列も求めること。直交行列とはその列ベクトル達のノルムが1で、互いに直交しているものを言う。
- (3) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。
- (4) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$q(\boldsymbol{x}) = q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

とする。このとき、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して、 $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ であることを示せ。また、 $q(\boldsymbol{x}) = 0$ となる \boldsymbol{x} をすべて求めよ。ただし、求めた \boldsymbol{x} が $q(\boldsymbol{x}) = 0$ となるものすべてであることの理由も述べること。

- (5) $q(\boldsymbol{x})$ を (4) で与えられた関数とする。 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ がノルム1のベクトル全体を動くとき、 $q(\boldsymbol{x})$ の最大値を求めよ。ただし、最大値を与える \boldsymbol{x} は実際に求めなくてもよいが、求めた値が最大値である理由は述べること。