解 答

2026	科目名	数学（解析）	1/1

(1)(i)

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}}(1,\,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,\,1-t)-f(1,\,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2+(1-t)-2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+t}{t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(1)(ii) 関数 $f(x,\,y)$ は点 $\mathrm{A}(a,\,b)$ で全微分可能なので，ある定数 $\alpha,\,\beta$ が存在して，

$$f(a+h,\,b+k)-f(a,\,b)=\alpha h+\beta k+o(\sqrt{h^2+k^2})$$

が成立する．実際には，$\alpha=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\,b),\,\beta=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\,b)$ である．

今，

$$\varepsilon(h,\,k):=f(a+h,\,b+k)-f(a,\,b)-f_x(a,\,b)h-f_y(a,\,b)k$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)}\frac{\varepsilon(h,\,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ である．よって，

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{\sqrt{(\lambda t)^2+(\mu t)^2}}\times\sqrt{\lambda^2+\mu^2}=0 \qquad (*)$$

である．同様にして，$\displaystyle\lim_{t\to-0}\frac{\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{t}=0$ であるので，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{t}=0$ である．このとき，

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}}f(a,\,b) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+\lambda t,\,b+\mu t)-f(a,\,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f_x(a,\,b)\lambda t+f_y(a,\,b)\mu t+\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(f_x(a,\,b)\lambda+f_y(a,\,b)\mu+\frac{\varepsilon(\lambda t,\,\mu t)}{t}\right) = f_x(a,\,b)\lambda+f_y(a,\,b)\mu \end{aligned}$$

である．したがって，関数 $f(x,\,y)$ は点 A にてクトル $\boldsymbol{v}=(\lambda,\,\mu)\neq\boldsymbol{0}$ に対して方向微分可能であり，$D_{\boldsymbol{v}}f(a,\,b)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\,b)\lambda+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\,b)\mu$ である．

(2)(i) （解答案その１）関数 $f(x,\,y)$ は全微分可能なので，D の任意の点 $(x,\,y)$ に対して，点 $(x,\,y\,f(x,\,y))$ を接点とする接平面が存在する．$f_x=0,\,f_y=0$ なので，この接平面は xy-平面に平行な平面である．よって，関数　$f(x,\,y)$ のグラフが表す曲面の接平面はどの点においても xy-平面に平行となる．したがって，このような曲面は水平な平面以外には無く，関数 $f(x,\,y)$ は定数関数でなければならない．

（解答案その２）　設問 (1) により，あらゆる方向ベクトル $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ に対して，$D_{\boldsymbol{v}}f(x,\,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\lambda+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\mu=\boldsymbol{0}$ である．このことは関数 $f(x,\,y)$ のグラフと xy 平面に垂直な平

面との切り口（交わり）を考えたとき，このような平面すべてに対して，その切り口である曲線がどの箇所でも接線の傾きが 0 であること，すなわち，その曲線が xy 平面に平行な曲線であることを意味する．したがって，関数 $f(x,\, y)$ のグラフは水平な平面以外には無く，関数 $f(x,\, y)$ は定数関数でなければならない．

(2)(ii)　2 変数関数の平均値の定理により，領域 D 内の任意の線分の両端点 $(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)$ に対して，この線分上に点 $(x_*,\, y_*)$ が存在して，

$$f(x_1,\, y_1) - f(x_2,\, y_2) = f_x(x_*,\, y_*)(x_1 - x_2) + f_y(x_*,\, y_*)(y_1 - y_2)$$

が成立する．ここで，条件 $f_x = f_y = 0$ であるので，

$$f(x_1,\, y_1) - f(x_2,\, y_2) = 0, \qquad \text{すなわち，}\quad f(x_1,\, y_1) = f(x_2,\, y_2)$$

である．

D は弧状連結なので，D 内の任意の 2 点 $(a,\, b),\, (c,\, d)$ に対してこれら 2 点を結ぶ D の折れ線（繋がったいくつかの線分）が存在する．この折れ線の各線分に対して，上記のことを適用すれば，$f(a,\, b) = f(c,\, d)$ であることが分かる．すなわち，$f(x,\, y)$ は定数関数である．

(3)　領域 D で定義された関数 $h(x,\, y) = f(x,\, y) - g(x,\, y)$ を考える．関数 $f(x,\, y)$ と 関数 $g(x,\, y)$ が恒等的に等しいことを示すには，設問 (2) により，$\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2} \times \frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \times \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{1+y^2} - \left(\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2} \times \frac{(1-xy)+x(x+y)}{(1-xy)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+y^2} - \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって，D にて，$h_(x,y)$ は定数関数 $h(x,\, y) = C$ （C は定数) である．

また，$h(1,\, 0) = f(1,\, 0) - g(1,\, 0) = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} \dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4} + 0 - \dfrac{\pi}{4} = 0$ より，$C = 0$.

すなわち，D において，$h(x,\, y) = 0$ である．

したがって，D にて 2 つの関数 $f(x,\, y)$ と $g(x,\, y)$ は恒等的に等しい．