問題用紙

2026	科目名	数学（解析）	2/2	通し番号	

以下の 問題を解いて，数学（解析）の解答用紙に答えを記入せよ．

(1) $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D が $\mathbf{R}^2$ の領域であるとは，D の任意の 2 点が D に含まれる曲線で結ぶことができる開集合のことである．$\mathbf{R}^2$ 内の領域 D で定義された 2 変数関数 $f(x,\,y)$ が，点 $\mathrm{A}(a,\,b) \in D$ においてベクトル $\boldsymbol{v} = (\lambda,\,\mu)$ 方向に微分可能であるとは，極限値

$$D_{\boldsymbol{v}} f(a,\,b) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+\lambda t,\, b+\mu t) - f(a,\,b)}{t}$$

が存在することである．ただし，$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ である．この極限値が存在するとき，その極限値 $D_{\boldsymbol{v}} f(a,\,b)$ を点 A におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分係数という．以下の小問に答えよ．

(i) $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x,\,y) = x^2 + y$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{v} = (1,\,-1)$ 方向の方向微分係数 $D_{\boldsymbol{v}}(1,\,1)$ を定義に従って計算せよ．

(ii) 一般に，領域 D で定義された関数 $f(x,\,y)$ が点 $\mathrm{A}(a,\,b) \in D$ において全微分可能であるならば，この点 A で任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (\lambda,\,\mu) \neq \mathbf{0}$ の方向に，$f(x,\,y)$ は微分可能であることを示せ．また，その方向微分係数 $D_{\boldsymbol{v}} f(a,\,b)$ を，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\,b)$ を用いて表せ．

(2) $\mathbf{R}^2$ 内の領域 D で定義された 2 変数関数 $f(x,\,y)$ が D の全ての点で全微分可能であるとする．このとき，$f(x,\,y)$ が定数関数であるための必要十分条件は D において恒等的に $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ である．このことに関して以下の小問に答えよ．

(i) D において恒等的に $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ であるならば $f(x,\,y)$ が定数関数であることを幾何的に簡単に説明せよ．

(ii) D において恒等的に $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ であるならば $f(x,\,y)$ が定数関数であることを証明せよ．ただし，必要であれば，全微分可能な関数に対して，2 変数関数の平均値の定理が成立することを証明無しで用いてもよい．

(3) 領域 $D = \left\{ (x,\,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; -\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2},\ xy < 1 \right\}$ で定義された次の 2 つの関数を考える：

$$f(x,\,y) = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y, \quad g(x,\,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

このとき，これら 2 つの関数は領域 D において恒等的に等しいことを示せ．ただし，必要であれば，これら 2 つの関数が D において全微分可能であることを証明無しで用いてもよい．