問　題　用　紙

2026	科目名	知能情報：離散数学系科目群	1／2	通し番号	

問題１　有限アルファベット（文字集合）を $\Sigma = \{0,1\}$ とする文字列（記号列）全体の集合 Σ^* 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ と，Σ^* 上の 2 項関係について考える．

ある 2 項関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ が任意の $a, b, c \in \Sigma^*$ について，(1) aRa が成り立ち（反射的），(2) aRb のとき bRa であり（対称的），(3) aRb かつ bRc のとき aRc を満たす（推移的）ならば，R は同値関係であるという．以下の各問に答えよ．

問 1-1　文字列 $x \in \Sigma^*$ に含まれる文字 0 の数と文字 1 の数それぞれを $\#_0(x), \#_1(x)$ とし，x が含む 0 の数から 1 の数を減じた差を $\Delta_{0-1}(x) = \#_0(x) - \#_1(x)$ と書くとする．Σ^* 上の 2 項関係 R_3 は，文字列 $a, b \in \Sigma^*$ が $\Delta_{0-1}(a) \bmod 3 = \Delta_{0-1}(b) \bmod 3$ を満たすとき，またそのときに限り aR_3b であると定義する．ただし $x \bmod y$ は整数 x を正の整数 y で割った余り（剰余）を表し，$r = x \bmod y$ は $r < y$ を満たす非負整数のうち $x = y \cdot q + r$ となる整数 q が存在するものと定義される．

以下の 6 つの文字列を aR_3b となる要素からなる大きさ 2 の集合 $\{a, b\}$ にわけ，そのすべてを解答欄に書け．

$$000,\quad 010,\quad 01011,\quad 11001,\quad 11011,\quad 101101$$

問 1-2　上の問で定義した 2 項関係 R_3 は同値関係である．任意の $a, b, c \in \Sigma^*$ について R_3 が推移的であることを，整数の同値関係 ≡（合同）の定義をもちいて示せ．

問 1-3　言語 $L_3 \subseteq \Sigma^*$ を

$$L_3 = \{x \in \Sigma^* \mid \Delta_{0-1}(x) \bmod 3 = 0\}$$

と定義する．この L_3 を受理する最小状態数の決定性有限オートマトンを状態遷移図で解答欄にかけ．

状態遷移図では，非受理の状態は状態名を〇で囲んで，受理状態は◎で囲んで表し，遷移は文字のラベルがついた状態間の矢印で示し，初期状態はラベルおよび始点のない矢印で指して表せ．状態および遷移は一切省略しないこと．

問　題　用　紙

2026	科目名	知能情報：離散数学系科目群	２／２	通し番号	

問 1-4　言語 $L_0 \subseteq \Sigma^*$ は，含まれる 0 の個数と 1 の個数の差が 0 である文字列の集合

$$L_0 = \{x \in \Sigma^* \mid \Delta_{0-1}(x) = 0\}$$

とする．L_0 は正規（正則）言語か．正規言語ならば，解答欄の「正規」に丸をつけ，L_0 を受理する決定性有限オートマトンで状態数が最小のものを状態遷移図で解答欄に描け．正規言語でないならば，解答欄の「非正規」に丸をつけ，以下の波線枠中のマイヒルとネロードの定理を使った証明の空欄（ア）から（オ）のそれぞれを埋めるのに適切な語句または数式を，空欄の記号とともに解答欄に書け．なお同じ記号の空欄は同じ語句または数式で埋めるものとする．

証明　言語 $L_0 \subseteq \Sigma^*$ が正規言語だとすると，マイヒルとネロードの定理より，右不変で有限指数の Σ^* 上の同値関係 $\equiv_{L_0}$ が存在する．一方で，値が異なる整数の組の数は $\boxed{（ア）}$ から，$i \neq j$ を満たす整数の組 i, j に対し 0 のみからなる文字列で $\boxed{（イ）} \equiv_{L_0} \boxed{（ウ）}$ となるものが存在する．ここで 1 のみからなる $\boxed{（エ）}$ について，$\equiv_{L_0}$ は右不変なので，$\boxed{（イ）}\boxed{（エ）} \equiv_{L_0} \boxed{（ウ）}\boxed{（エ）}$ でなければならない．しかし $i \neq j$ であるから，左辺について $\boxed{（イ）}\boxed{（エ）} \in \boxed{（オ）}$ であるのに右辺について $\boxed{（ウ）}\boxed{（エ）} \notin \boxed{（オ）}$ となり，右不変であることに矛盾する．以上から，L_0 は正規言語ではない．

［参考］有限指数，右不変，マイヒルとネロードの定理

Σ^* 上の 2 項関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ が同値関係であるとする．R によって $x \in \Sigma^*$ と同値となる集合 $\{y \in \Sigma^* \mid xRy\}$ を，x を含む同値類という．また R による同値類の数が有限であるとき，有限指数であるという．

言語 $L \subseteq \Sigma^*$ について，Σ^* 上の右不変な 2 項関係 $\equiv_L$ を次のように定義する．文字列の組 $x, y \in \Sigma^*$ について，xz と yz のどちらかのみが L に含まれる，そのような $z \in \Sigma^*$ が存在しないとき，またそのときに限り，$x \equiv_L y$．ただし表記 xz は，二つの文字列 x と z を連結して得られる文字列を表す．2 項関係 $\equiv_L$ は同値関係である．

以下の 3 つの条件は同値である：

1. 言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が正規である，すなわち L を受理する決定性有限オートマトン M が存在する．

2. L は，ある右不変な有限指数の同値関係による同値類の和集合で表せる．

3. 2 項関係 $\equiv_L$ は有限指数である．