令 和 8 年 度 （ 第 1 回 一 般 型 ）　　大 学 院 入 学 試 験

数学

受験番号（　　　　　　　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　）

1．次の連立微分方程式を解け．ただし，$x(0)=1$，$y(0)=-2$とする．

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)-2y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)+4y(t)$$

【解答】

$$x(t)=-2e^{2t}+3e^{3t}$$

$$y(t)=e^{2t}-3e^{3t}$$

２．Dを，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq a^2$とする．次の積分を行列式を用いて求めよ．ここに$a$は正の実数である．

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

【解答】

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

3．ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(x,y)=\left(x\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)},\, y\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right)$がある．$\nabla\cdot\boldsymbol{f}(x,y)$を求めよ．

【解答】

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}(x,y)=2\left\{1-\left(x^2+y^2\right)\right\}e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

令 和 8 年 度 （ 第 1 回 一 般 型 ）　　大 学 院 入 学 試 験

数学

受験番号（　　　　　　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　）

２．Dを，$x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq a^2$とする．次の積分を行列式を用いて求めよ．ここに$a$は正の実数である．

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$$

==== 解=====

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$とする．この時，Dは，平面の集合A，$0 \leqq r \leqq a, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$へ1対1に変換される．

この時，$\left|\boldsymbol{J}(r,\theta)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_A e^{-r^2} |r| drd\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^a e^{-r^2} rdr \right) d\theta = \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) //$$

令 和 8 年 度 （ 第 1 回 一 般 型 ）　　大 学 院 入 学 試 験

数学

受験番号（　　　　　　　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　）

3．ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(x, y) = \left(x \cdot e^{-\left(x^2 + y^2\right)}, y \cdot e^{-\left(x^2 + y^2\right)} \right)$がある．$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x, y)$を求めよ．

==== 解答 ====

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{ x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right\} \\
&= e^{-\left(x^2 + y^2\right)} - 2x^2 e^{-\left(x^2 + y^2\right)} + e^{-\left(x^2 + y^2\right)} - 2y^2 e^{-\left(x^2 + y^2\right)} \\
&= 2\left\{ 1 - \left(x^2 + y^2\right) \right\} e^{-\left(x^2 + y^2\right)}
\end{aligned}
$$