

科目	数学-A
----	------

受験番号 _____

氏名 _____

--

科目	数学-A
----	------

--

※解答は、点線より下に記入すること。

(注：この用紙の問題への解答はこの面のみとし、裏面にはしないこと。)

問題1 2変数関数 $f(x, y) = \frac{x^2 e^x}{y} + \sqrt{1+y^2} \log|x|$ に関して、偏微分 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ および $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を求めよ。

問題2 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。必要であれば、関係式 $\frac{d \tan \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ を用いて良い。

問題3 行列を用いて表した連立一次方程式 $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & \lambda + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) 自明でない解 (「 $(x, y) = (0, 0)$ 」以外の解) を持つための条件式を示せ。導出過程も記すこと。
- (2) (1) の条件式を満たす λ の値 λ_1 と λ_2 を求めよ。ただし、 $\lambda_1 > \lambda_2$ とする。
- (3) $\lambda = \lambda_1$ のとき、上記の連立一次方程式の自明でない解 (x, y) を1つ求めよ。導出過程も記すこと。

解答1 (配点30点)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x(2+x)e^x}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{x} \quad \blacksquare$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^2 e^x}{y^2} + \frac{y \log|x|}{\sqrt{1+y^2}} \quad \blacksquare$$

解答2 (配点20点)

$$x = \tan \theta \text{ と変換すると, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi \quad \blacksquare$$

解答3 (配点全30点)

(1) (配点15点)

自明でない解を持つ条件は「逆行列が存在しない」=「行列式が0」なので、

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 \quad \blacksquare$$

(2) (配点5点)

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \quad \blacksquare$$

(3) (配点10点)

$$\lambda = \lambda_1 = 2 \text{ のとき, 解くべき式は } \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \neq 0) \quad \blacksquare$$

数学 B

【解答】

(1)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}x + \frac{1}{2}$$

(2)

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin 2nx$$

数学 C

【解答】

(1)

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t + \theta)] = \frac{1}{s^2 + \omega^2} (s \sin \theta + \omega \cos \theta) \quad (s > 0)$$

(2)

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$$

(3)

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad (s > a)$$