工学専攻・分野５（宇宙システム工学）
物理・解答用紙

I

受験番号	模範解答

質量 M、長さ Lの一様な棒を図のように鉛直な壁と水平な床にたてかける。床に対する棒の静止摩擦係数をμ_xとし、棒と床がなす角を θ とする。θ を小さくしていって、棒が滑り出す直前の角度を θ_c とするとき、以下の問いに答えよ。ただし壁はなめらかとし、重力加速度は g とする。

(1)　壁と床からの抗力をそれぞれ R_x、R_y としたとき、滑り出す直前の鉛直方向、水平方向それぞれでの、力のつり合いの式を示せ。

滑り出す直前の床では最大摩擦力 $F_x=\mu_x R_y$ が働く。よって力のつり合いの条件は以下になる。

鉛直方向：

$$\boxed{R_y = Mg}$$

水平方向：

$$\boxed{R_x = \mu_x R_y}$$

(2)　滑り出す直前の下端（A 点）まわりのモーメントを求めた上で、それらの関係を式で示せ。

いま棒は動かないので下端まわりのモーメントの和はゼロになる。よって、

$$\boxed{Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta_c = R_x L\sin\theta_c}$$

(3)　θ_c を μ_x を用いて示せ。

$$\boxed{\theta_c = tan^{-1}\frac{1}{2\mu_x}}$$

裏面を使用する場合は，その旨断り書きすること

工学専攻・分野５（宇宙システム工学）

物理・解答用紙

受験番号	模範解答

2

摩擦のないピストンのついたシリンダー中の理想気体の状態を変化させた。その際に行った熱力学的操作に関する以下の各設問に解答せよ。気体の量を n [mol]、気体定数を R [J / mol K] 、 定積モル比熱をC_v、定圧モル比熱をC_pとし、これらの記号および圧力、体積、温度を表す添字付きのP [Pa] V [m^3]、T [K]を用いて単位をつけて解答せよ。導出過程において他の記号を必要とする場合は、定義を行った上で使用し、導出結果には用いないこと。

(1) n [mol]の理想気体について、状態 A（P_1 [Pa]、T_1[K]、V_1 [m^3]）から状態 B（ P_2 [Pa]、T_2[K]、V_2 [m^3]）へ準静的に膨張させたとき、この気体が外部にした仕事W_1を導出せよ。ただし$P_1 > P_2$、$V_1 < V_2$、$T_1 = T_2$とする。解答の導出は、ピストンの面積を a、 x 軸方向に移動するピストンの移動の始点を b_1 、終点を b_2 とした以下の式から開始し、a、x、b_1、b_2 の各記号は導出結果には用いないこと。

$$\int_{b_1}^{b_2} Pa\,dx$$

$$W_1 = \int_{b_1}^{b_2} Pa\,dx = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1[logV]_{V_1}^{V_2} = nRT_1(logV_2 - logV_1) \boxed{= nRT_1 log\frac{V_2}{V_1} \quad [\mathrm{J}]}$$

(2) n [mol]の理想気体について、状態 B（ P_2 [Pa]、T_2[K]、V_2 [m^3]）から状態 C（ P_3 [Pa]、T_3[K]、V_3 [m^3]）へ準静的に断熱膨張させたとき、この気体が外部にした仕事W_2を導出せよ。ただし$P_2 > P_3$、$V_2 < V_3$とする。解答の導出は、ピストンの面積を a、 x 軸方向に移動するピストンの移動の始点を b_2 、終点を b_3 とした以下の式から開始し、a、x、 b_2、b_3 の各記号は導出結果には用いないこと。

$$\int_{b_2}^{b_3} Pa\,dx$$

定圧モル比熱をC_pとし、比熱比$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$とすると

$$W_2 = \int_{b_2}^{b_3} Pa\,dx = \int_{V_2}^{V_3} P\,dV = P_2V_2^{\gamma}\int_{V_2}^{V_3}\frac{1}{V^{\gamma}}dV = P_2V_2^{\gamma}\left[\frac{1}{1-\gamma}V^{1-\gamma}\right]_{V_2}^{V_3}$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}P_2V_2^{\gamma}\left(V_3^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right)=\frac{1}{1-\gamma}(P_3V_3 - P_2V_2)=\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_3) = \frac{nRC_v}{C_p-C_v}(T_2 - T_3)$$

$$= \boxed{nC_v(T_2 - T_3)\ [\mathrm{J}]}$$

裏面を使用する場合は，その旨断り書きすること

工学専攻・分野５（宇宙システム工学）

物理・解答用紙

(3)　設問（１）における気体の内部エネルギー変化を求めよ。

$\Delta U_1 = nC_v \Delta T = \boxed{0 \quad [\mathrm{J}]}$

(4)　設問（２）における気体の内部エネルギー変化を求めよ。

$\Delta U_2 = nC_v \Delta T = \boxed{nC_v(T_3 - T_2)\ [\mathrm{J}]}$

(5)　設問（１）において気体が吸収した熱量を求めよ。

$\Delta U = 0$より

$\Delta Q = W = \boxed{nRT_1 log\frac{V_2}{V_1} \quad [\mathrm{J}]}$

(6)　設問（２）において気体が吸収した熱量を求めよ。

$\boxed{\text{断熱膨張のため } 0[\mathrm{J}]}$

裏面を使用する場合は，その旨断り書きすること

工学専攻・分野５（宇宙システム工学）

物理・解答用紙

3

受験番号	模範解答

図に示すように面積 A 、電極板間隔 d の平行平板電極がある。電源を接続し電圧 V_0 を印加して電極表面を電荷 Q で帯電させた後、電源を取り外した。その後、平板電極間の図に示す位置に厚さ t の誘電体が挿入され、誘電体の表面には誘導電荷 q が誘起された。電極板は非常に広く電極板間隔は十分小さいものとする。このとき、以下の設問に平行平板電極の面積 A、電極板間隔 d、誘電体の厚さ t、誘電体の誘電率 ε、真空中の誘電率 ε_0、電荷 Q 、誘導電荷 q のいずれかのみ（導出過程において変数・係数を定義してもよいが、最終解答には使用しないこと）を用いて答えなさい。導出の過程は省略せず、明瞭に記述すること。

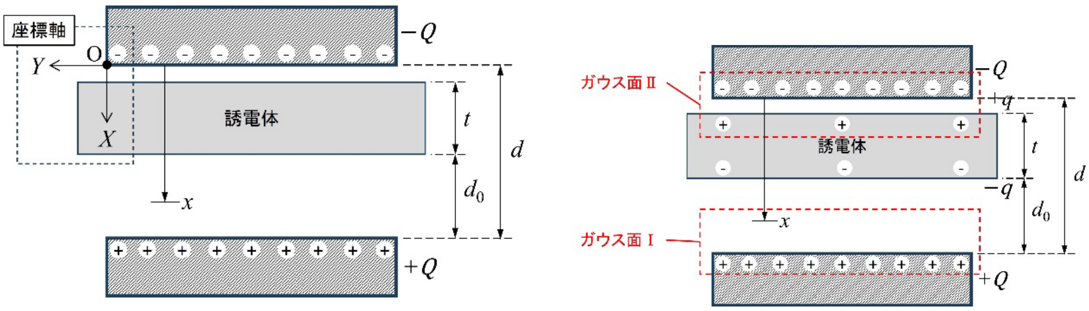

図２

(1)　誘電体を挿入する前の平行平板電極間の任意の位置 x における電場の大きさを、ガウスの法則を用いて積分することによって導出しなさい。さらに電場の向きを図中の座標軸の定義に従って答えなさい。

ガウス面の微小面積要素を $d\vec{A}$ とすると、誘電体を挿入する前に対してガウスの法則を図２に示すガウス面Ｉに適用すると平行平板電極間の電場 $\overrightarrow{E_0}$ は

$$\varepsilon_0 \oint \overrightarrow{E_0} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E_0 \cdot A = Q$$

$$\boxed{\therefore\ E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \qquad X\text{軸の負の方向}}$$

工学専攻・分野５（宇宙システム工学）
物理・解答用紙

(2)　誘電体を挿入した後の誘電体内部の任意の位置 x における電場の大きさを、ガウスの法則を用いて積分することによって導出しなさい。さらに電場の向きを図中の座標軸の定義に従って答えなさい。

誘電体を挿入した後に対してガウスの法則を図２のガウス面Ⅱに適用すると平行平板電極間の電場 $\overrightarrow{E_1}$ は

$$\varepsilon_0 \oint \overrightarrow{E_1} \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_0 E_1 \cdot A = -Q + q \qquad \boxed{\therefore\ E_1 = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 A} \quad X\text{軸の負の方向}}$$

もしくは（ガウスの法則で自由電荷のみを考慮する場合）

$$\varepsilon \oint \overrightarrow{E_1} \cdot d\vec{A} = -\varepsilon E_1 \cdot A = -Q \qquad \boxed{\therefore\ E_1 = \frac{Q}{\varepsilon A} \quad X\text{軸の負の方向}}$$

(3)　設問(1)および(2)の解答を用い、積分経路に沿って積分することにより、図に示す誘電体を含む平行平板電極間の電位差を導出しなさい。

平行平板電極の上側電極内側表面から下側電極内側表面に渡って（X 軸に沿って）積分すると

$$V = \int_0^{d-t-d_0} -\overrightarrow{E_0} \cdot d\vec{x} + \int_{d-t-d_0}^{d-d_0} -\overrightarrow{E_1} \cdot d\vec{x} + \int_{d-d_0}^{d} -\overrightarrow{E_0} \cdot d\vec{x}$$

$$= E_0 \times (d-t) + E_1 \times t$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d-t) + \frac{Q-q}{\varepsilon_0 A}t = \frac{Q(d-t)+(Q-q)t}{\varepsilon_0 A} = \boxed{\frac{Qd-qt}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q\left(d-\frac{q}{Q}t\right)}{\varepsilon_0 A}}$$

もしくは（誘導電荷 q を使わずに）

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d-t) + \frac{Q}{\varepsilon A}t = \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left(d-t+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}t\right)}$$

(4)　設問(3)の解答を用いて、誘電体を含む平行平板電極のコンデンサーの電気容量を導出しなさい。

電気容量は $Q = CV$ より、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd-qt}{\varepsilon_0 A}} = \frac{Q}{\frac{Q\left(d-\frac{q}{Q}t\right)}{\varepsilon_0 A}} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{d-\frac{q}{Q}t}}$$

もしくは（誘導電荷 q を使わずに）

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left(d-t+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}t\right)} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{d-t+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}t}}$$

裏面を使用する場合は，その旨断り書きすること