問題 1

(1)　正しい記述:　b

解説：(a) 非正則ならば $\mathrm{rank}\, A < N$。(b) 非正則ならば $\det A = 0$。(c) 非正則ならば線形従属（線形独立な列ベクトルの最大数が rank になる）。(d) 非正則でも対角化できる。たとえば

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角行列であり、かつ非正則。

(2)　正しい記述:　a, b, d

解説：(a) (b) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ ベクトルが張る空間の次元は、線形独立なベクトルの組み合せの最大数と同じ。(c) 核空間とは、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合が作る部分線形空間。$\boldsymbol{x}$ が 4 次元空間、$\boldsymbol{y}$は 3 次元空間になるので、1 次元失われる。したがって核空間の次元は 1 次元。すなわち $\dim(\mathrm{Ker}\, P) = 1$。(d) 非ゼロ固有値の数が$\mathrm{rank}\, P = \dim\, (\mathrm{Im}\, P)$ に等しい。またゼロ固有値の数が $\dim\, (\mathrm{Ker}\, P)$ に等しい。

(3)　正しい記述:　なし

解説：(a) 転置行列を掛け合わせれば対称行列になる。実際に成分を計算しても求められるが、$S^T = (A^T A)^T = A^T A = S$ として証明すればよりエレガント。(b) 実対称行列は必ず対角化できる。(c) Sの固有値はAの固有値の二乗になるので、必ず非負。(d) 実対称行列の固有ベクトルは必ず直交する。

１１．線形代数	2/3

問題２

(1)　固有値（大きい順）：3, 2, 1, 0

三角行列の固有値は対角成分。

(2)　$\det A = 0$

三角行列の行列式は対角成分の積。

(3)　$\operatorname{rank} A = 3$

ランクは非ゼロ固有値の個数に等しい。

(4)　$\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$

線形写像により失われる次元（核空間の次元）はゼロ固有値の数に等しい。

(5)　$\dim(\operatorname{Im} A) = 3$

線形写像の写像先が作る空間（像空間）の次元は、非ゼロ固有値の数（写像により失われない次元）。

問題３

(1)　$\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$　　　$\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$

固有値が回答。三角行列の固有値は対角成分。

(2)　エンジニアユーザー　$\boldsymbol{p_X}:\boldsymbol{p_Y} = 1:1$

一般ユーザー　$\boldsymbol{q_X}:\boldsymbol{q_Y} = 1:0$

対応する固有ベクトルを回答すればよい。

※詳細は次ページへ。

問題より、以下の式が与えられている。

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

また、ヒントにもあるとおり、以下の３つの等式がある。

$$\begin{bmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

となる。これより、

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix}^{-1}$$

が得られる。したがってa, bは$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$の固有値で、$\begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_X \\ q_Y \end{bmatrix}$は対応する固有ベクトル。

題意より$a > b$なので、$a = 5, b = 2$が得られる。

解説：この問題のように、等比級数的に発展する現象は固有値・固有ベクトルが使われる最も代表的な事例である。すなわち固有値は、システム内部に独立して存在する等比級数的現象の公比を表し、固有ベクトルはそれらが線形混合されて観測される過程を表す。固有値を公式として覚えるのではなく、意味まで理解していれば、この問題文を見ただけで「固有値と固有ベクトルが出てくる」とあたりをつけられる。