

1 1. 線形代数	1/3
-----------	-----

1. 選択肢のうち、正しい記述をすべて選べ。(ひとつも正しい記述がない場合は、「なし」と回答すること)。なおベクトル・行列はすべて実ベクトル・実行列とする。

(1) 行列  $A$  は  $N \times N$  の非正則行列である。以下のうち正しい命題はどれか。

- a) ランク  $\text{rank } A = 0$  である
- b) 行列式  $\det A = 0$  である
- c)  $A$  の列ベクトルは線形独立である
- d)  $A$  は常に対角化できない

(2)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  は 4 次元数ベクトルであり、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  が張る線形空間は 3 次元である。また  $P = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]$  は、これら 4 つのベクトルを並べた  $4 \times 4$  行列である。以下のうち正しい命題はどれか。

- a)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  は線形従属である。
- b)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  のうち、線形独立な 3 つのベクトルを選ぶことができる。
- c) 線形写像  $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$  の核空間の次元は  $\dim(\text{Ker } P) = 3$  である。
- d)  $P$  は値が 0 の固有値を必ず持つ。

(3) 行列  $A$  は  $N \times N$  行列であり、 $S = A^T A$  とする。以下のうち正しい記述はどれか。

- a)  $S$  は対称行列とは限らない。
- b)  $S$  は対角化できるとは限らない。
- c)  $S$  の固有値は非負実数とは限らない。
- d)  $S$  の固有ベクトルは互いに直交するとは限らない。

2. 行列  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  について以下の問に答えよ。

- (1) 固有値をすべて求め、大きい順に答えよ。
- (2) 行列式  $\det A$  を求めよ
- (3) ランク  $\text{rank } A$  を求めよ
- (4) 線形写像  $y = Ax$  の核の次元  $\dim(\text{Ker } A)$  を求めよ
- (5) 線形写像  $y = Ax$  の像の次元  $\dim(\text{Im } A)$  を求めよ

3. A社が提供する生成AIのサービスは爆発的に利用者が増えている。とりわけエンジニアのユーザー集団では月々に利用者が  $a$  倍に増えており、一般のユーザー集団でも月々に利用者が  $b$  倍に増えている。

A社の提供するサービスには、無料プランXと有料プランYがあり、以下の式で利用者が増えていることがわかった。

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

ここで  $x_t, y_t$  はそれぞれ第  $t$  月のプランX, Yの利用者数である。

- (1) エンジニアユーザーの増加率  $a$  と一般ユーザーの増加率  $b$  を求めよ。なお  $a > b$  とする。
- (2) エンジニアユーザーと一般ユーザーは、無料プランXと有料プランYをそれぞれどれくらいの比率で用いているか求めよ。

---

#### 【ヒント】

第  $t$  月のエンジニアユーザーの人数を  $u_t$ 、一般ユーザーの人数を  $v_t$  とすると、それぞれ公比  $a, b$  の等比級数で増加する。したがって対角行列を用いて

$$\begin{bmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

と書ける。また、エンジニアユーザーにおけるプランX, Yの利用率を  $p_X, p_Y$ 、一般ユーザーにおけるプランX, Yの利用率を  $q_X, q_Y$  とすると、

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_X & q_X \\ p_Y & q_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

と書ける。(1) は  $a, b$  を求める問題である。(2) は  $p_X:p_Y, q_X:q_Y$  を求める問題である。