

微分積分 入試問題 - 解答例 (数式モード対応版)

■ 大問 1 : 極限と発散の速さの比較

1-1.

(1) $a_n = n / \log(n) \rightarrow \infty$ (分子の増加が分母を上回るため)

(2) $b_n = \sqrt{n} \rightarrow \infty$

$$1-2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} \rightarrow \infty$$

∴ a_n の方が速く発散する。

1-3. 判定 : 収束する (極限值は 0)

理由 : 分子は x^2 のオーダーだが、分母は指数関数であり、指数関数の方が増加が速いため。

■ 大問 2 : 応用的な不定積分の理解と活用

2-1. $u = 1 + x^2$ と置換すると $du = 2x dx$ となる。

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

2-2. 部分積分 ($u = x, dv = e^x dx$) を用いる。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$2-3. (1) S(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^t = \arctan(t)$$

(2) $S(t) = \arctan(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $\pi/2$ に漸近 (面積は有限)。

■大問3：微分と物理現象の関係

- 3-1. (1) 速度 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ 、加速度 $a(t) = 6t - 12$
(2) 物体が静止するのは $v(t) = 0$ より $t = 1, 3$ 。その時の加速度は $a(1) = -6, a(3) = 6$ 。
- 3-2. (1) $\frac{dL}{dt} = L_0 k e^{-kt}$ 。成長速度は初期に大きく、時間とともに減少する。
(2) $t \rightarrow \infty$ のとき $e^{-kt} \rightarrow 0$ となるため、 $L(t) \rightarrow L_0$ (飽和) となる。

■大問4：微分方程式と現象の理解

- 4-1. (1) $\frac{1}{y} dy = 2x dx$ (変数分離)
 $\rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$ (式の両辺をそれぞれ積分)
 $\rightarrow \log|y| = x^2 + C_1$
 $\rightarrow |y| = e^{x^2 + C_1}$
 $\rightarrow |y| = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$
 $y = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$
 $y = Ae^{x^2}$ (A は任意定数)

(2) $y = Ae^{x^2} \rightarrow y(0) = Ae^0 = A \cdot 1 = A,$

よって $A = 3$ であり、 $y = 3e^{x^2}$

この関数の変化 (下記どれでも良い)

- x の 2 乗に対して急激に増加
- x が正でも負でも対照的に増加
- $x = 0$ で最小値 $y = 3$ 。それ以降は左右に広がるに従って指数的に増大。

4-2. (1) 一般解 : $C(t) = Ae^{-kt}$

(2) $C(t) = C_0e^{-kt}$

(3) 半減期 T は $\frac{C_0}{2} = C_0e^{-kT}$ を満たす時間であり、 $T = \frac{\log 2}{k}$ となる。これは半減期が初期濃度に依存せず、減衰速度 k のみで決まることを示している。