微分積分 入試問題

試験時間：60 分

構成：大問 4 問、小問計 10 問

■ 大問 1：極限と発散の速さの比較

1-1. 次の 2 つの数列の極限を求めよ。

(1) $a_n = \frac{n}{\log n}$

(2) $\mathrm{b_n} = \sqrt{\mathrm{n}}$

1-2. 次式の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1-3. 次の極限が収束するか発散するかを判定せよ。またその理由を述べよ：

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} \right)$$

■ 大問 2：応用的な不定積分の理解と活用

2-1. 次の不定積分を求めよ。ただし、適切な置換を用いて解くこと：

$$\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

2-2. 次の積分に部分積分を用いて答えを求めよ：

$$\int x\, e^x\, dx$$

2-3. 関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ のグラフと x 軸に挟まれる、$x = 0$ から $x = t$ までの面積を S(t)とする。

(1) S(t)を定積分の形で表せ。

(2) S(t)がどのような関数か説明せよ。

■ 大問 3：微分と物理現象の関係

3-1. ある物体が直線上を運動しており、その位置 x(t) は時間tの関数として次のように与えられている：

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

(1) この物体の速度$v(t)$、加速度 a(t) を求めよ。

(2) 物体が静止している時刻と、そのときの加速度を求めよ。

3-2. ある生物の体長が時間 t に応じて次のように成長する：

$$L(t) = L_0\left(1 - e^{-k}\ \right)$$

ただし $L_0, k > 0$ は定数とする。

(1) $L(t)$の時間に関する微分を求め、どのような成長速度になるかを説明せよ。

(2) $t\ \rightarrow \infty$のとき、体長はどうなるか。

■ 大問 4：微分方程式と現象の理解

4-1.

(1) 次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ：

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

(2) 上記の微分方程式において、$y(0) = 3$のときの特解を求めよ。また、この関数がどのように変化するかを簡単に説明せよ。

4-2. ある薬品が体内で分解され、その濃度 C(t) は時間 t に応じて次の微分方程式に従うとする：

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

ただし $k\ >\ 0$ は定数である。

(1) 一般解を求めよ。

(2) $C(0) = C_0$のとき、t時点の濃度を求めよ。

(3) このモデルが「半減期」の概念とどのように関係するかを説明せよ。なお、半減期とは、ある物質（または薬品）の量（濃度）が最初の量の半分になるまでにかかる時間を意味する。

微分積分 入試問題 回答例

■ 大問 1：極限と発散の速さの比較

1-1.

(1) $a_n = n / \log(n) \to \infty$（分子の増加が分母を上回るため）

(2) $b_n = \sqrt{n} \to \infty$

1-2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n / \log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} / \log n \to \infty$

∴ a_n の方が速く発散する。

1-3. 分子は x^2 のオーダー、分母は指数関数なので、

$\lim_{x\to\infty} (x^2 + 3x + 1)/e^x = 0$（指数関数の方が増加が速いため）

■ 大問 2：応用的な不定積分の理解と活用

2-1. $u = 1 + x^2$ と置換 → $du = 2x\,dx$

$\int x\sqrt{(1 + x^2)}\,dx = (1/2) \int \sqrt{u}\,du = (1/3)(1 + x^2)^{3/2} + C$

2-2. $\int x e^x\,dx$ → 部分積分：$u = x, dv = e^x\,dx$

$\to uv - \int v\,du = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C$

2-3.

(1) $S(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx$

これは、よく知られた不定積分の公式：

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

を利用する。

$$S(t) = [\arctan x]_0^t = \arctan(t) - \arctan(0)$$
$$\arctan(0) = 0 \quad より S(t) = \arctan(t)$$

(2) $S(t) = \arctan(t)$ は $t \to \infty$ で $\pi/2$ に漸近（面積は有限）

■ 大問 3：微分と物理現象の関係

3-1.

$$\mathrm{x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t}$$

$$\mathrm{v(t) = dx/dt = 3t^2 - 12t + 9}$$

$$\mathrm{a(t) = dv/dt = 6t - 12}$$

静止：

$$\mathrm{v(t) = 0 \to t\ =\ 1, 3}$$

$$\mathrm{a(1) = -6, a(3) = 6}$$

3-2.

(1)$\mathrm{dL/dt = L^0ke^{-kt}}$→ 初期に大きく、時間とともに減少

(2) $t \to \infty$ で$\mathrm{e^{-kt}} \to 0, \mathrm{L(t)} \to \mathrm{L^0}$（飽和）

■ 大問 4：微分方程式と現象の理解

4-1

(1) 変数分離法を用いる

与えられた方程式 $\frac{dy}{dx} = 2xy$の両辺を分離して積分できる形にする：

$$\frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$$

両辺を積分する：

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\ dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$$

指数関数に戻す：

$$|y| = e^{x^2+C} = e^C \cdot e^{x^2}$$

よって一般解は ：

$$\boxed{y = Ae^{x^2} \quad (A\text{ は任意定数})}$$

(2)

$$y = Ae^{x^2} \Rightarrow y(0) = Ae^0 = A \cdot 1 = A$$

よって$A = 3$ であり、$y = 3e^{x^2}$

この関数の変化（下記、どれでも良い）

・x の 2 乗に対して急激に増加

・x が正でも負でも対称的に急増

・x=0 で最小値 y=3。それ以降は左右に広がるに従って指数的に増大。

4-2

(1). 与えられた微分方程式：

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

これは「変数分離型」の微分方程式。次のように両辺を分離して積分する：

$$\frac{1}{C} = -k\,dt$$

両辺を積分すると：

$$\int \frac{1}{C}\,dC = \int -k\ dt \Rightarrow \ln|C| = -kt + C_1$$

両辺を指数関数の形に戻すと：

$$|C| = e^{-kt+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-kt}$$

このとき、CCC は薬の濃度であり正の値なので、絶対値を外して：

$$C(t) = Ae^{-kt} \quad (A = e^{C_1} > 0)$$

(3) $C(0) = Ae^{-k\cdot 0} = A \cdot 1 = A = C_0, C(0) = Ce^{-kt}$

(3) 半減期とは、ある物質（または薬品）の量（濃度）が最初の量の半分になるまでにかかる時間を意味する。

すなわち、半減期 とは、$C(T) = \frac{C_0}{2}$

を満たすような Tのことである。

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-k}$$

両辺を C_0 で割る（$C_0 > 0$ のため）：

両辺の自然対数を取る：

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kT \Rightarrow -\ln 2 = -kT \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{k}$$

つまり、この微分方程式モデルでは、半減期は減衰速度 kのみによって決まり、初期濃度 には依存しないことがわかる。

微分積分入試問題（大問 **1**〜**4**）の出題の意図

■ 大問 1：極限と発散の速さの比較

出題の意図：

極限の計算技能に加えて、関数や数列の発散・収束の「程度」や「相対的な速さ」への理解を問う問題
単なる計算にとどまらず、関数の漸近的な振る舞いや、比較のための解析的視点を身につけているかを確認

応用数学や物理などでは、収束の速さの比較は誤差評価などに直結する重要概念であり、入試段階でその素地を測る

■ 大問 2：応用的な不定積分の理解と活用

出題の意図：

不定積分において、置換積分・部分積分の「自然な活用」や、「積分が表す量の意味」に対する理解を評価

パターン的な公式の適用ではなく、「なぜこの変数変換が必要なのか」「どのような形に帰着できるのか」といった思考を促す

特に 2-3 では、「積分によって得られる量＝面積」が具体的な関数（arctan）と対応していることに着目させ、積分の幾何的・関数的意味の理解を図る

■ 大問 3：微分と物理現象の関係

出題の意図：

微分が「変化率」や「加速度」など、現実の物理現象と密接に関わることを体験させ、公式の機械的適用にとどまらず、現象理解を伴った微分の応用力を問う

数学を使って「現象の読み解き（停止時刻、成長の飽和など）」ができるかを評価

特に成長関数に関する問題（3-2）は、生物や医療、社会科学など様々な分野で使われる指数関数モデルを扱っており、現象とモデルの関係づけができるか見る

■ 大問 4：微分方程式と現象の理解

出題の意図：

微分方程式の解法だけでなく、その意味や、現実世界の変化をどう数理的に表すかという理解力を評価

4-1, 4-2 では「解法の習得」と「関数の挙動把握」の両方を扱い、解と現象の対応づけ（例えば指数関数的増加）ができるかを問う

4-3 のような指数関数型の減衰は、物理・生物・経済分野で頻出するモデルであり、数学が社会現象を説明する言語であることへの気づきも促す